重力場での非線形拡散方程式の解法

物性研究 42－5(1984－8)

重力場での非線形拡散方程式の解法

宮崎大・工　餌　取　寛　次

(1984年7月4日受理)

摘　要

重力の影響を受けながら拡散する粒子について，その数密度の分布が密度に依存した拡散係数を有する非線形拡散方程式の解として示される。この解と従来の線形で重力場を考慮しない解とが比較される。

§1　序

Brown 運動をする粒子の集団的ふるまいに対する重力場の影響は，線形としての立場から Uhlenbeck[1] や Chandrasekhar[2] 等の解を含んだより一般化した形で求められ[3]，更にカノニカル分布や周期入力波による検討も極く最近報告されている[4]。

非線形な立場での検討は，初期及び境界条件を考慮した Green 関数によって従来からもなされているが[5,6]，重力場を考慮しては殆どなされていない。

今回の解析は，不純物の濃度依存を考慮した非線形性の解法[7]を参考にし，重力場での境界条件を新たに考慮した解が示されるものである。

§2　重力場での非線形拡散方程式

重力場での Brown 粒子の Langevin 方程式，重力方向での任意位置 z での Fick の法則及び連続の式を考慮すると次の式が得られる。

$$\frac{\partial\rho(z,t)}{\partial t}=-<v(t)>\frac{\partial\rho(z,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial\rho(z,t)}{\partial z}\right) \tag{2.1}$$

但し $\rho(z,t)$：任意時刻 t での粒子数密度，

　$<v(t)>$：Brown 粒子の速さ $v(t)$ に対する集団平均，

ETORI, Kanji

$D = D(\rho)$ ：$\rho(z, t)$ に依存する拡散係数

であり，Brown 粒子に働くランダムな力 $R(t)$ に対し $<R(t)> = 0$ の定義によって $<v(t)>$ は次のように与えられる。

$$<v(t)> = v_0 \cdot \exp(-\frac{\gamma}{m}t) - \frac{mg}{\gamma}[1 - \exp(-\frac{\gamma}{m}t)] \tag{2.2}$$

$v_0 = v(0)$， γ ：まさつ係数， m ：粒子質量， g ：重力加速度。

(2.1)式で D が一定の場合についての検討は前回の報告[3,4]によって詳しく述べられている。

§3　非線形解

(2.1)式について，初期及び境界条件が次のように与えられるものとする。

$$\rho(z, 0) = \rho_0\,\delta(z), \quad \rho_0 \text{ ：初期一定密度,} \tag{3.1}$$

$$\int_{-L_0}^{L_0} \rho(z, t)\,\mathrm{d}z = \rho_0 \quad \text{：有限領域 } z < |L_0| \text{ での系。} \tag{3.2}$$

さて，新しい変数 ξ を次のように定義する。

$$\xi = z - \int_0^t <v(\tau)>\mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

上記の置換によって(2.1)式と条件(3.1)及び(3.2)式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial\rho(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(D\frac{\partial\rho(\xi, t)}{\partial\xi}\right), \tag{3.4}$$

$$\rho(\xi, 0) = \rho_0\,\delta(\xi) \tag{3.5}$$

$$\int_{-L}^{L} \rho(\xi, t)\,\mathrm{d}\xi = \rho_0, \quad L = L_0 - \int_0^t <v(\tau)>\mathrm{d}\tau\text{。} \tag{3.6}$$

ここで半導体等での実験的対応としての拡散係数の形と，ξ 及び t に対する置換[7]を考えると

$$D = K_n \rho^n, \quad n \geq 0, \quad K_n \text{ ：任意条件下での定数,} \tag{3.7}$$

$$\rho(\xi, t) = C(\eta)/t^m, \ \eta = \xi/t^m, \ m > 0, \tag{3.8}$$

(3.4)式は次のような常微分方程式となる(附録参照)

$$K_n C^n(\eta)\frac{\mathrm{d}C(\eta)}{\mathrm{d}\eta} + \frac{1}{n+2}\eta \cdot C(\eta) = 0 \tag{3.9}$$

$n=0$ での（3.9）式の積分結果に対して，拡散係数の表示（3.7）及び置換（3.8）と条件（3.6）及び（3.3）式を考慮すると，重力場での有限領域（$-L_0 < z < L_0$）で与えられる線型拡散系のインパルス応答が得られる。

$$\rho(z,\ t) = \left[\frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0\ t}} \Big/ \mathrm{erf}\left(\frac{L_0 - \int_0^t < v(\tau) > \mathrm{d}\tau}{\sqrt{4D_0\ t}} \right) \right]$$

$$\times \exp\left[- \frac{(z - \int_0^t < v(\tau) > \mathrm{d}\tau)^2}{4D_0\ t} \right] , \quad D_0 = K_0 \tag{3.10}$$

但し

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2)\, \mathrm{d}y\ .$$

$n \geq 1$ に対しては (3.9) 式の結果と (3.8) 式から

$$\rho(\xi,\ t) = \left[nA - \frac{n\,\xi^2}{2(n+2)K_n t^{2/(n+2)}} \right]^{1/n} \Big/ t^{1/(n+2)} ,$$

A：（3.9）に対する積分定数 (3.11)

A を決めるために (3.11) 式を次のように書き換えてみる。

$$\rho(\xi,\ t) = (1/t^{N/(1+2N)})\lambda^N (1 + 1/M)^{-M\xi^2/[2(2+\frac{1}{N})K_n t^{2N/(2N+1)}\lambda]}$$

但し (3.12)

$$A = N\lambda, \quad N = 1/n, \quad M = -\left[2\left(2 + \frac{1}{N}\right)K_n t^{2N/(2N+1)} N\lambda\right]/\xi^2\ .$$

したがって（3.12）式について，$n \to 0$（$N \to \infty$）での極限を考えると

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ (n \to 0)}} \rho(\xi,\ t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \lambda^N \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{-M\xi^2/(4D_0 t\lambda)}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \lambda^N \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(- \frac{\xi^2}{4D_0\ t\ \lambda} \right) \tag{3.13}$$

一方（3.10）式は変数 ξ を用いて表わすと

$$\rho(\xi,\ t) = \left[\frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0\ t}} \Big/ \mathrm{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{4D_0\ t}} \right) \right] \exp\left(- \frac{\xi^2}{4D_0\ t} \right), \quad n = 0. \tag{3.14}$$

(3.13) = (3.14) を考慮すると，λ は次のように推定され得る。

$$\lambda = \left[\frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0}} \Big/ \mathrm{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{4D_0 t}} \right) \right]^{1/N} 。 \tag{3.15}$$

故に (3. 11) と (3. 15) の両式と置換 (3. 3) を考慮することによって，重力場での非線形拡散方程式 (2. 1) の解 $\rho(z, t)_{n,g}$ が $D(\rho) = K_n \rho^n$ と与えられる場合に限って求められたことになる。ここで λ は，変数 ξ，t の関数になっているが，直接的に η, $C(\eta)$ の関数にはなっていないことに留意したい。

したがって $\rho(z, t)_{n,g}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\rho(z, t)_{n,g} \\ &= \left\{ \left[\frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0}} \Big/ \mathrm{erf}\left(\frac{L_0 - \int_0^t < v(\tau) > \mathrm{d}\tau}{\sqrt{4D_0 t}} \right) \right]^n \right. \\ &\left. - \frac{n\left(z - \int_0^t < v(\tau) > \mathrm{d}\tau\right)^2}{2(n+2)K_n t^{2/(n+2)}} \right\}^{1/n} \Big/ t^{1/(n+2)} , \quad n \geq 0 . \end{aligned} \tag{3.16}$$

§ 4 結 論

(3.10) 式について従来の式との関係を示すと, (3.16) 式から $n = 0$ 及び $g = 0$ によって

$$\rho(z, t)_{0,g} = \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} \exp\left[- \frac{\left(z - \int_0^t < v(\tau) > \mathrm{d}\tau\right)}{4D_0 t} \right], \quad L_0 \to \infty \tag{4.1}$$

$$\rho(z, t)_{0,0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi D_0 t}} \exp\left[- \frac{z^2}{4D_0 t} \right], \quad v_0 = 0, \quad g = 0. \quad (-\infty < z < \infty) \tag{4.2}$$

(4. 1) 式は重力場を考慮した無限長領域でのインパルス応答[8]であり，(4. 2) 式は従来から固体結晶場での原子濃度に対する拡散定数の計測によく用いられるGauss 型表示[9-11]である。

(3.16) 式と (4.2) 式との比較によって，従来の線形無重力場の粒子数密度と重力場での非線形なそれとの比較が示される。即ち

$$\rho(z,t)_{n,g} = \{[\rho(z,t)_{0,0}\sqrt{t}\ \exp[\frac{z^2}{4D_0 t}] \Big/ \mathrm{erf}(\frac{L_0 - \int_0^t \langle v(\tau)\rangle d\tau}{\sqrt{4D_0 t}})]^n$$

$$- \frac{n(z - \int_0^t \langle v(\tau)\rangle d\tau)^2}{2(n+2)K_n t^{2/(n+2)}}\}^{1/n} \Big/ t^{1/(n+2)} \qquad (4.3)$$

$$\approx \{[\rho(0,t)_{0,0}\sqrt{t} \Big/ \mathrm{erf}(\frac{L_0 - \int_0^t \langle v(\tau)\rangle d\tau}{\sqrt{4D_0 t}})]^n \frac{n(\int_0^t \langle v(\tau)\rangle d\tau)^2}{2(n+2)K_n t^{2/(n+2)}}\}^{1/n}$$

$$\Big/ t^{1/(n+2)}, \quad \frac{z}{2\sqrt{D_0 t}} \ll 1, \quad z \ll \int_0^t \langle v(\tau)\rangle d\tau < L_0 \ . \qquad (4.4)$$

(3.10), (3.16) または (4.3) 或は (4.4) 式による超流動ヒートパイプ内での熱輸送に関する拡散流[12]への適用, 及び重力場が無視出来ない金属プラズマや固体結晶場での不純物原子濃度の拡散に関係した物性計測への適用等については，拡散係数の表示 (3.7) の K_n や n の数値についての検討と共に今後の課題とされる。

附　録

(3.4) 式に (3.7) 及び (3.8) 式を代入すると

$$-m[C(\eta) + \eta\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta}] \Big/ t^{m+1}$$

$$= K_n[nC^{n-1}(\eta)(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta})^2 + C^n(\eta)\frac{\partial^2 C(\eta)}{\partial \eta^2}] \Big/ t^{m(3+n)} \qquad (A.1)$$

$m+1 = m(3+n)$ と置くと (A.1) 式は

$$nK_nC^{n-1}(\eta)(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta})^2 + K_nC^n(\eta)(\frac{\partial^2 C(\eta)}{\partial \eta^2}) + \frac{1}{n+2}\eta(\frac{\partial C(\eta)}{\partial \eta})$$

$$+ \frac{1}{n+2}C(\eta) = 0 \qquad (A.2)$$

(A.2) 式の両辺を各積分することによって

$$K_n C^n(\eta)\frac{dC(\eta)}{d\eta}+\frac{1}{n+2}\eta\cdot C(\eta)=0 \quad , \tag{A.3}$$

が得られる。

参　考　文　献

1) G.E. Uhlenbeck and L.S. Ornstein : Phys. Rev. **36** (1930)823.

2) S. Chandrasekhar : Rev. Mod. Phys. **15** (1943)1.

3) 餌取：物性研究　**40** (1983)527.

4) K. Etori : Jpn. J. Appl. Phys. **23** (1984)695.

5) J. Crank : *Mathematics of Diffusion* (Oxford Univ. Press, London, 1956) pp. 147-185.

6) J.M. Burgers : *The Nonlinear Diffusion Equation* (D. Reidel Pub. Comp., Boston, 1974)pp. 46-110.

7) B. Tuck : J. Phys. D (Appl. Phys.) **9** (1976)123.

8) 餌取：物性研究 **36** (1981)209.

9) M.C. Wang and G.E. Uhlenbeck : Rev. Mod. Phys. **17** (1945)323.

10) Ref. (5), pp. 9-12.

11) J.R. Manning : *Diffusion Kinetics for Atoms in Crystals* (D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1968) Chap. 1, pp. 28-29, Chap. 2, pp. 57-74.

12) K. Etori : ISAS Report S.P. 2 (1984)61.